Objetivos a cubrir **Código : MAT-CDI.8**

- Reglas de derivación. Derivada de la suma, producto y cociente de funciones.
- Reglas de derivación. Regla de la cadena.
- Derivadas de orden superior. Derivación implícita.

Ejercicios resueltos

Ejemplo 1 *: Derive la siguiente función*

$$f(x)=\sqrt{x}+\frac{3}{\sqrt{x}}$$

Solución : Tenemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\sqrt{x}+\frac{3}{\sqrt{x}}\right)'=\left(\sqrt{x}\right)'+\left(\frac{3}{\sqrt{x}}\right)'=\left(x^{1/2}\right)'+\left(3x^{-1/2}\right)'=\left(x^{1/2}\right)'+3\left(x^{-1/2}\right)' \\ &= \frac{1}{2}\,x^{\frac{1}{2}-1}+3\left(-\frac{1}{2}\right)\,x^{-\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}\,x^{-\frac{1}{2}}-\frac{3}{2}\,x^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}-\frac{3}{2x^{\frac{3}{2}}}=\frac{x-3}{2x^{3/2}} \end{aligned}$$

Luego

$$f'(x)=\frac{x-3}{2x^{3/2}}.$$

★

Ejemplo 2 *: Derive la siguiente función*

$$h(x)=\cos^4\left(\operatorname{sen}^2 x\right)$$

Solución : Aplicando regla de la cadena, ya que, la función a derivar es una comp'osición de funciones, observe que el orden en que aparecen las funciones en dicha composición es:

$$\begin{array}{ccccccccccc} (\cdot) & \longrightarrow & \operatorname{sen}(\cdot) & \longrightarrow & (\cdot)^2 & \longrightarrow & \cos(\cdot) & \longrightarrow & (\cdot)^4 & & \\ (x) & \longrightarrow & \operatorname{sen}(x) & \longrightarrow & (\operatorname{sen}(x))^2 & \longrightarrow & \cos\left(\operatorname{sen}^2(x)\right) & \longrightarrow & \left(\cos\left(\operatorname{sen}^2(x)\right)\right)^4 & = & \cos^4\left(\operatorname{sen}^2(x)\right) \end{array}$$

para derivar comenzamos con la última que aplicamos, en este caso la función $(\cdot)^4$, continuamos con $\cos(\cdot)$ y así, sucesivamente.

$$\begin{array}{ccccccccc} (\cdot) & \longrightarrow & \operatorname{sen}(\cdot) & \longrightarrow & (\cdot)^2 & \longrightarrow & \cos(\cdot) & \longrightarrow & (\cdot)^4 \\ & & & & & & & & \downarrow \ \longleftarrow \text{Derivada} \\ 1 & & \cos(\cdot) & & 2(\cdot) & & -\operatorname{sen}(\cdot) & & 4(\cdot)^3 \end{array}$$

así,

$$\begin{array}{ccccccccc} (x) & \longrightarrow & \operatorname{sen}\left(\underbrace{x}\right) & \longrightarrow & \left(\underbrace{\operatorname{sen}(x)}\right)^2 & \longrightarrow & \cos\left(\underbrace{\operatorname{sen}^2(x)}\right) & \longrightarrow & \left(\underbrace{\cos\left(\operatorname{sen}^2(x)\right)}\right)^4 \\ & & \downarrow \begin{smallmatrix}\text{Función}\\ \text{interna}\end{smallmatrix} & & \downarrow \begin{smallmatrix}\text{Función}\\ \text{interna}\end{smallmatrix} & & \downarrow \begin{smallmatrix}\text{Función}\\ \text{interna}\end{smallmatrix} & & \downarrow \begin{smallmatrix}\text{Función}\\ \text{interna}\end{smallmatrix} \\ 1 & & \cos\left(\overbrace{x}\right) & & 2\left(\overbrace{\operatorname{sen}(x)}\right) & & -\operatorname{sen}\left(\overbrace{\operatorname{sen}^2(x)}\right) & & 4\left(\overbrace{\cos\left(\operatorname{sen}^2(x)\right)}\right)^3 \end{array}$$

luego

$$h'(x)=(1)\ \ (\cos(x))\ \ (2(\operatorname{sen}(x)))\ \ \left(-\operatorname{sen}\left(\operatorname{sen}^2(x)\right)\right)\ \ \left(4\left(\cos\left(\operatorname{sen}^2(x)\right)\right)^3\right)$$

es decir,

$$h'(x) = -8 \operatorname{sen} x \cos x \operatorname{sen}\left(\operatorname{sen}^2 x\right) \cos^3\left(\operatorname{sen}^2 x\right).$$

También podemos derivar directamente usando la regla de la cadena

$$\begin{aligned}
h'(x) = \left(\cos^4\left(\operatorname{sen}^2 x\right)\right)' &= 4\cos^3\left(\operatorname{sen}^2 x\right)\ \left(\cos\left(\operatorname{sen}^2 x\right)\right)' \\
&= 4\cos^3\left(\operatorname{sen}^2 x\right)\ \left(-\operatorname{sen}\left(\operatorname{sen}^2 x\right)\right)\ \left(\operatorname{sen}^2 x\right)' \\
&= -4\cos^3\left(\operatorname{sen}^2 x\right)\ \operatorname{sen}\left(\operatorname{sen}^2 x\right)\ \left(2\operatorname{sen} x\right)\ \left(\operatorname{sen} x\right)' \\
&= -8\cos^3\left(\operatorname{sen}^2 x\right)\ \operatorname{sen}\left(\operatorname{sen}^2 x\right)\ \operatorname{sen} x\ \cos x
\end{aligned}$$

Luego

$$h'(x) = -8 \operatorname{sen} x \cos x \operatorname{sen}\left(\operatorname{sen}^2 x\right) \cos^3\left(\operatorname{sen}^2 x\right).$$

★

Ejemplo 3 *: Derive la siguiente función*

$$f(x) = \sqrt[3]{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$$

Solución : Observemos que esta función es una función compuesta, así, para obtener su derivada aplicamos la regla de la cadena, comenzamos derivando la última función que aplicamos, en este caso $\sqrt[3]{(\cdot)}$, donde

$$\left(\sqrt[3]{(\cdot)}\right)' = \left((\cdot)^{1/3}\right)' = \frac{1}{3}(\cdot)^{1/3-1} = \frac{1}{3}(\cdot)^{-2/3} = \frac{1}{3(\cdot)^{2/3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{(\cdot)^2}}$$

entonces,

$$\begin{aligned}
f'(x) = \left(\sqrt[3]{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}\right)' &= \frac{1}{3}\,\frac{1}{\sqrt[3]{\left(x + \sqrt{x + \sqrt{x}}\right)^2}}\ \left(x + \sqrt{x + \sqrt{x}}\right)' \\
&= \frac{1}{3}\,\frac{1}{\sqrt[3]{\left(x + \sqrt{x + \sqrt{x}}\right)^2}}\ \left((x)' + \left(\sqrt{x + \sqrt{x}}\right)'\right) \\
&= \frac{1}{3}\,\frac{1}{\sqrt[3]{\left(x + \sqrt{x + \sqrt{x}}\right)^2}}\ \left(1 + \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{x + \sqrt{x}}}\ \left(x + \sqrt{x}\right)'\right) \\
&= \frac{1}{3}\,\frac{1}{\sqrt[3]{\left(x + \sqrt{x + \sqrt{x}}\right)^2}}\ \left(1 + \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{x + \sqrt{x}}}\ \left((x)' + \left(\sqrt{x}\right)'\right)\right) \\
&= \frac{1}{3}\,\frac{1}{\sqrt[3]{\left(x + \sqrt{x + \sqrt{x}}\right)^2}}\ \left(1 + \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{x + \sqrt{x}}}\ \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right)
\end{aligned}$$

Luego

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{\left(x + \sqrt{x + \sqrt{x}}\right)^2}}\ \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}}\ \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right).$$

★

Ejemplo 4 *: Estudie el signo de la primera y segunda derivada de la siguiente función*

$$g(x) = x^{4/3} - 4x^{1/3}$$

Solución : Calculamos la primera derivada

$$g'(x) = \left(x^{4/3} - 4x^{1/3}\right)' = \frac{4}{3}x^{1/3} - \frac{4}{3}x^{-2/3} = \frac{4}{3}x^{1/3} - \frac{4}{3x^{2/3}} = \frac{4}{3}\frac{x-1}{x^{2/3}} \qquad \Longrightarrow \qquad g'(x) = \frac{4}{3}\frac{x-1}{x^{2/3}},$$

estudiamos el signo de la derivada, es decir, resolvemos una de las siguientes desigualdades

$$\frac{4}{3}\frac{x-1}{x^{2/3}} > 0 \qquad \text{ó} \qquad \frac{4}{3}\frac{x-1}{x^{2/3}} < 0,$$

Resolvemos la primera, $\frac{4}{3}\frac{x-1}{x^{2/3}} > 0$. Buscamos la raíces de la expresión del numerador y la expresión del denominador

$$x - 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 1, \qquad \text{y} \qquad x^{2/3} = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 0$$

Estudiamos el signo

	$(-\infty, 0)$	$(0,1)$	$(1,\infty)$
$4/3$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$+$
$x^{2/3}$	$+$	$+$	$+$
	$-$	$-$	$+$

Luego, la primera derivada es positiva si

$$x \in (1, \infty)$$

y es negativa si

$$x \in (-\infty, 0) \bigcup (0, 1)$$

Calculamos, ahora, la segunda derivada

$$g''(x) = \left(\frac{4}{3}x^{1/3} - \frac{4}{3}x^{-2/3}\right)' = \frac{4}{9}x^{-2/3} + \frac{8}{9}x^{-5/3} = \frac{4}{9x^{2/3}} + \frac{8}{9x^{5/3}} = \frac{4}{9}\frac{x+2}{x^{5/3}} \quad \Longrightarrow \quad g''(x) = \frac{4}{9}\frac{x+2}{x^{5/3}},$$

estudiamos el signo de la derivada, es decir, resolvemos una de las siguientes desigualdades

$$\frac{4}{9}\frac{x+2}{x^{5/3}} > 0 \qquad \text{ó} \qquad \frac{4}{9}\frac{x+2}{x^{5/3}} < 0,$$

Resolvemos la primera, $\frac{4}{9}\frac{x+2}{x^{5/3}} > 0$. Buscamos la raíces de la expresión del numerador y la expresión del denominador

$$x + 2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = -2, \qquad \text{y} \qquad x^{5/3} = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 0$$

Estudiamos el signo

	$(-\infty, -2)$	$(-2,0)$	$(0,\infty)$
$4/9$	$+$	$+$	$+$
$x+2$	$-$	$+$	$+$
$x^{5/3}$	$-$	$-$	$+$
	$+$	$-$	$+$

Luego, la segunda derivada es positiva si

$$x \in (-\infty, -2) \bigcup (0, \infty)$$

y es negativa si

$$x \in (-2, 0)$$

★

Ejemplo 5 : *Sean* $f(1) = 3$*;* $f'(1) = 2$*;* $f'(9) = 1$ *y* $g(x) = f\left(f^2\left(x^2\right)\right)$*, calcular* $g'(1)$*.*

Solución : Calculemos $g'(x)$, usando la regla de la cadena

$$\begin{aligned}
g'(x) = \left(\ f\left(f^2\left(x^2\right)\right)\ \right)' &= f'\left(f^2\left(x^2\right)\right)\ \underbrace{\left(f^2\left(x^2\right)\right)'} \\
&= f'\left(f^2\left(x^2\right)\right)\ 2f\left(x^2\right)\ \underbrace{\left(f\left(x^2\right)\right)'} \\
&= f'\left(f^2\left(x^2\right)\right)\ 2f\left(x^2\right)\ f'\left(x^2\right)\ \underbrace{\left(x^2\right)'} \\
&= f'\left(f^2\left(x^2\right)\right)\ 2f\left(x^2\right)\ f'\left(x^2\right)\ 2x \\
&= 4xf\left(x^2\right) f'\left(f^2\left(x^2\right)\right) f'\left(x^2\right),
\end{aligned}$$

es decir,

$$g'(x) = 4xf\left(x^2\right) f'\left(f^2\left(x^2\right)\right) f'\left(x^2\right)$$

así,

$$g'(1) = 4(1)\, f\left((1)^2\right) f'\left(f^2\left((1)^2\right)\right) f'\left((1)^2\right) = 4f(1)\, f'\left(f^2(1)\right) f'(1)$$

como $f(1) = 3$, se tiene

$$g'(1) = 4(3)\, f'\left((3)^2\right) f'(1) = 12 f'(9)\, f'(1)$$

y $f'(1) = 2$; $f'(9) = 1$, con lo que

$$g'(1) = 12(1)(2) = 24.$$

Luego

$$g'(1) = 24.$$

★

Ejemplo 6 : *Hallar* dy/dx*, para*

$$x^2y + y^2 = \sqrt{x+y}$$

Solución : Derivamos implícitamente

$$\left(x^2y + y^2\right)' = \left(\sqrt{x+y}\right)' \qquad \Longrightarrow \qquad 2xy + x^2y' + 2yy' = \frac{1+y'}{2\sqrt{x+y}}$$

despejamos y'

$$\begin{aligned}
2xy + x^2y' + 2yy' = \frac{1+y'}{2\sqrt{x+y}} &\Longrightarrow 2xy + x^2y' + 2yy' = \frac{1}{2\sqrt{x+y}} + \frac{y'}{2\sqrt{x+y}} \\
&\Longrightarrow x^2y' + 2yy' - \frac{y'}{2\sqrt{x+y}} = \frac{1}{2\sqrt{x+y}} - 2xy \\
&\Longrightarrow \left(x^2 + 2y - \frac{1}{2\sqrt{x+y}}\right) y' = \frac{1}{2\sqrt{x+y}} - 2xy
\end{aligned}$$

$$2xy + x^2y' + 2yy' = \frac{1+y'}{2\sqrt{x+y}} \quad \Longrightarrow \quad \left(\frac{2\left(x^2+2y\right)\sqrt{x+y}-1}{2\sqrt{x+y}}\right)y' = \frac{1-4xy\sqrt{x+y}}{2\sqrt{x+y}}$$

$$\Longrightarrow \quad y' = \frac{1-4xy\sqrt{x+y}}{2\left(x^2+2y\right)\sqrt{x+y}-1},$$

por lo tanto,

$$y' = \frac{1-4xy\sqrt{x+y}}{2\left(x^2+2y\right)\sqrt{x+y}-1}$$

★

Ejemplo 7 *: Encuentre los puntos de* $2\left(x^2+y^2\right)^2 = 25\left(x^2-y^2\right)$, *donde la tangente sea horizontal.*

Solución : Derivamos implicítamente

$$\left(2\left(x^2+y^2\right)^2\right)' = \left(25\left(x^2-y^2\right)\right)' \quad \Longrightarrow \quad 2\left(\left(x^2+y^2\right)^2\right)' = 25\left(x^2-y^2\right)'$$

$$\Longrightarrow \quad 4\left(x^2+y^2\right)(2x+2yy') = 25(2x-2yy')$$

$$\Longrightarrow \quad 8\left(x^2+y^2\right)(x+yy') = 50(x-yy')$$

$$\Longrightarrow \quad 8\left(x^2+y^2\right)(x+yy') = 50(x-yy')$$

despejamos y'

$$8\left(x^2+y^2\right)(x+yy') = 50(x-yy') \quad \Longrightarrow \quad 4x\left(x^2+y^2\right) + 4y\left(x^2+y^2\right)y' = 25x - 25yy'$$

$$\Longrightarrow \quad 4y\left(x^2+y^2\right)y' + 25yy' = 25x - 4x\left(x^2+y^2\right)$$

$$\Longrightarrow \quad y\left(4x^2+4y^2+25\right)y' = 25x - 4x\left(x^2+y^2\right)$$

$$\Longrightarrow \quad y' = \frac{25x-4x\left(x^2+y^2\right)}{y\left(4x^2+4y^2+25\right)}.$$

Luego

$$y' = \frac{25x-4x\left(x^2+y^2\right)}{y\left(4x^2+4y^2+25\right)}$$

Buscamos los puntos (x_0, y_0), que pertenecen a la curva tales que, y' se anule

$$\frac{25x_0-4x_0\left(x_0^2+y_0^2\right)}{y_0\left(4x_0^2+4y_0^2+25\right)} = 0$$

de aquí,

$$25x_0 - 4x_0\left(x_0^2+y_0^2\right) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x_0\left(25-4\left(x_0^2+y_0^2\right)\right) = 0,$$

es decir,

$$x_0 = 0 \qquad \text{ó} \qquad 25-4\left(x_0^2+y_0^2\right) = 0.$$

Si $x_0 = 0$, entonces

$$2\left((0)^2+y_0^2\right)^2 = 25\left((0)^2-y_0^2\right) \quad \Longrightarrow \quad 2\left(y_0^2\right)^2 = 25\left(-y_0^2\right) \quad \Longrightarrow \quad 2y_0^4 + 25y_0^2 = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \left(2y_0^2+25\right)y_0^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad y_0 = 0 \qquad \text{ó} \qquad 2y_0^2+25 = 0$$

observemos que $2y_0^2+25=0$ no tiene solución en $\mathbb{R}$, mientras que $y_0=0$, no puede ser solución. puesto que

$$y'\Big|_{(x_0,y_0)}=\frac{25x_0-4x_0\left(x_0^2+y_0^2\right)}{y_0\left(4x_0^2+4y_0^2+25\right)}$$

no está definida allí, por lo tanto $x_0=0$ no puede ser solución de $x_0\left(25-4\left(x_0^2+y_0^2\right)\right)=0$

Si $25-4\left(x_0^2+y_0^2\right)=0$, es decir, $x_0^2+y_0^2=\dfrac{25}{4}$, entonces

$$2\left(x_0^2+y_0^2\right)^2=25\left(x_0^2-y_0^2\right)\quad\Longrightarrow\quad 2\left(\frac{25}{4}\right)^2=25\left(x_0^2-y_0^2\right)\quad\Longrightarrow\quad \frac{25}{8}=x_0^2-y_0^2$$

Por lo tanto, los puntos de la curva $2\left(x^2+y^2\right)^2=25\left(x^2-y^2\right)$, donde la tangente sea horizontal, son los puntos que están sobre la curva $x^2-y^2=\dfrac{25}{8}$. ★

Ejemplo 8 *: Demuestre que si* $f(x)=\operatorname{arcsen} x$, *entonces* $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, *con* $-1<x<1$.

Demostración : Es conocido que la función inversa de $g(x)=\operatorname{sen} x$, es $f(x)=\operatorname{arcsen} x$, definida en $-1\leq x\leq 1$, es decir, $g^{-1}(x)=f(x)$, además si una función g tiene inversa y es diferenciable, entonces g^{-1} es diferenciable y su derivada viene dada por

$$\left(g^{-1}(x)\right)'=\frac{1}{g'\left(g^{-1}(x)\right)}.$$

Como $g'(x)=\cos x$, se tiene que

$$\left(g^{-1}(x)\right)'=(\operatorname{arcsen} x)'=\frac{1}{\cos(\operatorname{arcsen} x)},$$

puesto que,

$$\operatorname{sen}^2(\cdot)+\cos^2(\cdot)=1\qquad\text{entonces,}\qquad \cos(\cdot)=\pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2(\cdot)},$$

por lo tanto, al componer la expresión del $\cos(\cdot)$ con la función $f(x)=\operatorname{arcsen} x$, como $\operatorname{Rgo} f=\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ y el coseno es positivo en ese intervalo, se tiene que

$$\cos(\operatorname{arcsen} x)=\sqrt{1-\operatorname{sen}^2(\operatorname{arcsen} x)}=\sqrt{1-(\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x))^2}=\sqrt{1-x^2},$$

luego

$$(\operatorname{arcsen} x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

definida para $-1<x<1$. ★

Ejercicios

1. Aplique las reglas de derivación para determinar la derivada de cada función (sin usar regla de la cadena)

1. $g(t)=3t^5-5t^2$	2. $f(x)=\dfrac{7\operatorname{sen} x}{x^2-x}$	3. $g(t)=\cos t+\sqrt{t}$	4. $f(x)=x\left(x^{-3}+2\right)$
5. $f(w)=\dfrac{\operatorname{sen} 5w}{5w^3}$	6. $f(x)=\sec x$	7. $g(t)=\sqrt{4t}-\dfrac{t^2}{t+1}$	8. $f(t)=2+\dfrac{1}{t}+\dfrac{1}{(t-1)^3}$
9. $g(z)=\dfrac{z^2-z}{\sqrt{3z}}$	10. $h(x)=\csc x$	11. $g(t)=\dfrac{t-\csc t}{t^2-t+4}$	12. $w(x)=f(x)\,g(x)\,h(x)$

13. $f(t)=(2t+3)^2$ 14. $y=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ 15. $f(x)=\sqrt{x}+\dfrac{3}{\sqrt{x}}$ 16. $f(x)=(\operatorname{sen}x+\cos x)^2$

17. $y=\dfrac{\sqrt[3]{t}}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{8t}}$ 18. $f(t)=\dfrac{6t^2}{t+1}$ 19. $f(t)=(\tan t+1)^2$ 20. $g(x)=\dfrac{x-\pi^3+\operatorname{sen}x}{x^2+x+1}$

21. $y=\dfrac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x^3}}$ 22. $f(x)=\operatorname{sen}2x$ 23. $g(t)=\dfrac{1}{(2-3/t)^2}$ 24. $g(y)=\tan y\cdot\operatorname{sen}(2y)$

25. $g(x)=\cos 2x$ 26. $f(x)=\sqrt{2px}$ 27. $f(t)=\dfrac{2-1/t^3}{4+1/t^6}$ 28. $h(x)=\dfrac{x+4\operatorname{sen}x}{x^5-1/x+3}$

29. $y=\dfrac{5\sec x}{x^2+x}$ 30. $f(x)=\dfrac{\tan x}{\cot x}$ 31. $w(t)=\dfrac{f(t)\,g(t)}{h(t)}$ 32. $h(x)=\dfrac{\sec x+\tan x}{\sec x-\tan x}$

33. $g(t)=\dfrac{\tan t}{2+t}$ 34. $f(x)=\dfrac{\cos 2x}{\operatorname{sen}2x}$ 35. $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}-x}$ 36. $h(x)=\sqrt{\sqrt{x}\cdot\operatorname{sen}^4 x}$

2. Estudie el signo de la derivada de las siguientes funciones

1. $h(x)=3x^3+2x-1$ 2. $g(x)=\dfrac{x^2}{x+2}+3$ 3. $f(x)=x-x^4$ 4. $g(x)=x^{4/3}-4x^{1/3}$

5. $f(x)=-2x^2+3x-4$ 6. $f(x)=x^{1/2}-x^{3/2}$ 7. $g(x)=\dfrac{1}{x-1}$ 8. $g(x)=1+x^{1/3}$

9. $f(x)=3x^4-4x^3-5$ 10. $h(x)=\dfrac{1}{x}+\sqrt{x}$ 11. $w(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$ 12. $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$

13. $f(t)=t^{1/3}(6-t)^{2/3}$ 14. $f(x)=3x^5-5x^3$ 15. $y=\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x}}$ 16. $f(t)=3t^{4/3}-4t$

3. Si $y=f(x)$ es una función derivable, calcular las expresiones de la derivada de la función g en cada unos de los siguientes casos

1. $g(x)=\dfrac{f(x)}{x^2}$ 2. $g(x)=\dfrac{x^2}{f(x)}$ 3. $g(x)=\dfrac{1+xf(x)}{\sqrt{x}}$ 4. $g(x)=\dfrac{1+xf(x)}{x^2}$

5. $g(x)=x^2f(x)$ 6. $g(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x}}{f(x)}$ 7. $g(x)=\dfrac{1+xf(x)}{\sqrt{x}}$ 8. $g(x)=\dfrac{x^3f(x)}{\cos x}$

4. Si $F(2)=3$; $F'(2)=4$; $G(2)=2$ y $G'(2)=5$; calcular el valor de las derivadas indicadas en $x=2$

1. $\dfrac{d}{dx}\{F(x)+G(x)\}$ 2. $\dfrac{d}{dx}\{F(x)\,G(x)\}$ 3. $\dfrac{d}{dx}\left\{\dfrac{xF(x)}{G(x)}\right\}$ 4. $\dfrac{d}{dx}\left\{\dfrac{x+2F(x)}{x^2-G(x)}\right\}$

5. Si se conoce que: $F(3)=2$; $F'(3)=-1$; $G(3)=3$ y $G'(3)=-4$; en el punto 3 calcular

1. $\dfrac{d}{dx}\{F(x)+G(x)\}$ 2. $\dfrac{d}{dx}\{F(x)\,G(x)\}$ 3. $\dfrac{d}{dx}\left\{\dfrac{F(x)}{G(x)}\right\}$ 4. $\dfrac{d}{dx}\left\{\dfrac{1+F(x)}{x^2-G(x)}\right\}$

6. Si $f(2)=1$; $f'(2)=5$; $g(2)=2$; $g'(2)=-3$; y $h(x)=\dfrac{x^2f(x)}{g(x)}$, calcular el valor de $h'(2)$.

7. Derive las siguientes funciones

1. $f(x)=\operatorname{sen}\sqrt{x}$ 2. $f(x)=\sqrt{\operatorname{sen}x}$ 3. $f(x)=\operatorname{sen}(\cos x)$ 4. $f(x)=\cos(\operatorname{sen}x)$

5. $f(x)=\tan(3x)$ 6. $f(t)=\operatorname{sen}(\pi t)$ 7. $f(x)=\operatorname{sen}\left(\frac{x}{\pi}\right)$ 8. $f(x)=\sqrt[4]{1-2x}$

9. $f(x) = \cos 3x$ 10. $f(x) = \cos^3 x$ 11. $f(x) = \tan(1/x)$ 12. $f(x) = \sec \sqrt[3]{x}$

13. $f(x) = \sqrt[3]{5x+1}$ 14. $f(t) = \cos\left(2 - t^3\right)$ 15. $g(t) = (4 - \tan t)^2$

16. $h(x) = \operatorname{sen}^2\left(3x^5 + 3\right)$ 17. $h(x) = \cos^4\left(\operatorname{sen}^2 x\right)$ 18. $y(x) = \sqrt{\tan(\cos 3x)}$

19. $f(x) = \sqrt{\sec \sqrt[3]{x}}$ 20. $f(x) = \cot \sqrt[3]{1+x^2}$ 21. $f(x) = \cos^3\left(\cos^2 4x\right)$

22. $y = G\left(G^2(G(z))\right)$ 23. $g(x) = \tan^4(2\sqrt[3]{\pi x})$ 24. $g(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{(x - 2x^3)^{4/3}}$

25. $f(x) = x\cos(1/x)$ 26. $f(t) = \dfrac{\tan t}{\sqrt[3]{1+\sqrt{t}}}$ 27. $h(x) = \dfrac{\sqrt{\sec x} + 2x}{\cos(\operatorname{sen} 3x)}$

28. $h(x) = \dfrac{\operatorname{sen}\left(x^4\right)}{\operatorname{sen}^4 x}$ 29. $w(x) = \dfrac{\operatorname{sen}\sqrt{2x}}{\sqrt{\operatorname{sen} 2x}}$ 30. $f(x) = \sqrt[3]{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$

31. $g(x) = \sqrt{\dfrac{x}{\operatorname{sen} x}}$ 32. $g(x) = \csc\left(\dfrac{\sqrt[3]{3x}}{x^4}\right)$ 33. $y(t) = \left(\sqrt{t^2+1} + 3t\right)^5$

34. $y(t) = \sqrt{\dfrac{t\tan t}{\operatorname{sen} 4t}}$ 35. $z(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(\sqrt{x} - 2)}{\sqrt[3]{\cos x}} - \sqrt{7x}$ 36. $y(t) = \dfrac{\tan\sqrt{t} + \operatorname{sen}(5t)}{t^2\cos(\operatorname{sen} t)}$

37. $f(t) = \dfrac{\left(t^2 - t\right)^3}{\cos^5\sqrt{6t}}$ 38. $y(t) = \left(\dfrac{t}{\operatorname{sen} t} + \dfrac{\sqrt{t}}{\sqrt[3]{3t+1}}\right)^{-1}$ 39. $y(t) = \left(\dfrac{t^3 + \sqrt{\operatorname{sen} t}}{\operatorname{sen}(\cos t)}\right)^5$

40. $g(t) = \operatorname{sen}^3\left(\sqrt{t} - t\right)$ 41. $h(x) = \sqrt[3]{\dfrac{\cos x}{\sqrt{x}} + \sqrt[4]{x}}$ 42. $y(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(\tan\sqrt{\operatorname{sen} x})}{x\cos^4(\operatorname{sen} x^2)}$

8. Si f es una función diferenciable, determinar $g'(x)$ en cada uno de los casos indicados

   1. $g(x) = f\left(x^2\right)$ 2. $g(x) = (f(x))^3$ 3. $g(x) = f(\operatorname{sen} x)$ 4. $g(x) = f\left(\tan\left(x^2\right)\right)$

   5. $g(x) = f(f(x))$ 6. $g(x) = f\left(\operatorname{sen}^2 x\right) + f\left(\cos^2 x\right)$

9. Si $f(2) = 4$; $f(4) = 6$; $f(6) = 1$; $f'(4) = 6$; $f'(2) = -2$; y $f'(6) = 1/4$, determinar en el punto $x = 2$ el valor de

   1. $\dfrac{d}{dx}(f(x))^3$ 2. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{3}{f(x)}\right)$ 3. $\dfrac{d}{dx}(f(f(x)))$ 4. $\dfrac{d}{dx}\left(f\left(f\left(x^2\right)\right)\right)$

10. Sean $f(1) = 3$; $f'(1) = 2$; $f'(9) = 1$ y $g(x) = f\left(f^2\left(x^2\right)\right)$, calcular $g'(1)$.

11. Sean

$$F(2) = 1; \quad F(4) = 2; \quad F(6) = 4; \quad F(8) = -\frac{12}{5}; \quad F'(2) = -1; \quad F'(4) = \frac{1}{3};$$

$$F'(6) = 3; \quad F'(8) = \frac{1}{9}$$

Si $G(x) = F\left(F^3\left(F\left(\dfrac{3x^2}{2}\right)\right)\right)$; $H(x) = x^2F\left(x^2\right)$ y $J(x) = G(x)H(x)$, hallar el valor de $J'(2)$.

12. Si $y = f(x)$ y $y = g(x)$ son funciones que admiten derivadas de cualquier orden con respecto a x, hallar las expresiones de $\dfrac{dy}{dx}$ y $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ sabiendo que $y = 5f^2(2x) + \dfrac{1}{6}g^3(4x)$

13. Si f es una función que admite derivada de cualquier orden, hallar

$$1.\ \frac{d}{dx}f(ax) \qquad 2.\ \frac{d}{dx}f(-x) \qquad 3.\ \frac{d}{dx}f\left(\frac{1}{x}\right) \qquad 4.\ \frac{d}{dx}f\left(x^2\right) \qquad 5.\ \frac{d^2}{dx^2}f\left(x^2\right) \qquad 6.\ \frac{d}{dx}f\left(f\left(x^3\right)\right)$$

14. Si f es una función que admite derivada de cualquier orden. Hallar $\dfrac{dy}{dx}$ y $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ para $x = 1$, si $y = f^2(f(3x))$ si se conoce que

$$f(1) = 1 \qquad f'(1) = 5 \qquad f''(1) = -2 \qquad f(2) = -1 \qquad f'(2) = 2 \qquad f''(2) = 0$$

$$f(3) = 1 \qquad f'(3) = 1 \qquad f''(3) = -\frac{1}{3} \qquad f(4) = \frac{1}{2} \qquad f'(4) = 2 \qquad f''(4) = 1$$

15. Considere la función $y = \left(x + \sqrt{1+x^2}\right)^4$, verifique que dicha función es solución de la ecuación

$$\left(x^2+1\right)y'' + xy' - 16y = 0.$$

16. Dada la función $y = \sqrt{\sec 2x}$, verificar que satisface la ecuación $y'' = 3\left(y^5 - y\right)$.

17. Verificar que la función $y = A\cos nx + B\operatorname{sen} nx$ satisface la ecuación $y'' + n^2 y = 0$, donde A, B y n son constantes.

18. Si $y = \left(x + \sqrt{1+x^2}\right)^n$, verificar que $\left(x^2+1\right)y'' + xy' - n^2 y = 0$.

19. Si $x = A\cos\omega t + B\operatorname{sen}\omega t + \dfrac{E}{2\omega}t\operatorname{sen}\omega t$ verificar que $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = E\cos\omega t$, donde A, B, E y ω son constantes.

20. Determine los valores de r para los cuales la ecuación dada tiene soluciones de la forma $y = x^r$

$$1.\ x^2y'' + 4xy' + 2y = 0 \qquad\qquad 2.\ x^2y'' - 4xy' + 4y = 0$$

21. Encontrar una ecuación de la recta tangente a la curva $y = 8/\left(x^2+4\right)$ en el punto $(2,1)$.

22. Encontrar una ecuación de la recta tangente a la curva $y = 2x - x^{-1}$ en el punto $P\left(\frac{1}{2}, -1\right)$.

23. Encuentre todos los puntos de la gráfica de $y = x^3 - x^2$ donde la tangente sea horizontal.

24. Encontrar una ecuación para la recta tangente a la curva $y = \dfrac{x-1}{x+3}$ que pasa por el punto $(1,0)$.

25. Encontrar una ecuación para la recta tangente a la curva $y = \dfrac{\sqrt{2x-1}}{x}$ que pasa por el punto $(1,1)$.

26. Encuentre los puntos de la curva $y = x^3 - x^2 - x + 1$ en los que la tangente sea horizontal.

27. Encuentre todos los puntos de la gráfica de $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + x$ donde la recta tangente tenga pendiente 1.

28. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva dada en el punto indicado

$$1.\ y = \frac{x}{x-3},\ (6,2) \qquad 2.\ y = x + \frac{4}{x},\ (2,4) \qquad 3.\ y = x^{5/2},\ (4,32) \qquad 4.\ y = \frac{1}{x^2+1}\ \left(-1, \frac{1}{2}\right)$$

29. Encuentre las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $y = \dfrac{x-1}{x+1}$ que sean paralelas a la recta $x - 2y = 1$.

30. Determine en qué punto de la curva $y = x\sqrt{x}$ la recta tangente es paralela a la recta $3x - y + 6 = 0$.

31. Determine para qué valores de x la gráfica de $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 6x + 87$ tiene tangente horizontal.

32. ¿Cuántas rectas tangentes a la curva $y = x/(x+1)$ pasan por el punto $(1, 2)$? ¿En qué puntos estas tangentes tocan a la curva?

33. Encuentre las ecuaciones de las dos rectas que pasan por el punto $(2, -3)$ y que son tangentes a la parábola $y = x^2 + x$.

34. Demuestre que la curva $y = 6x^3 + 5x - 3$ no tiene tangentes con pendiente 4.

35. Encuentre la ecuación de la recta normal a la curva dada en el punto indicado. La **recta normal** a una curva C en un punto P es, por definción, la recta que pasa por P y es perpendicular a la recta tangente a C en P.

    1. $y = 1 - x^2$, $(2, -3)$ 2. $y = \dfrac{1}{x-1}$, $(2, 1)$ 3. $y = \sqrt[3]{x}$, $(-8, -2)$ 4. $y = f(x)$, $(a, f(a))$

36. ¿En qué punto de la curva $y = x^4$ la recta normal tiene pendiente 16?

37. Determine la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = \dfrac{2x+1}{1-x}$ en el punto $P(2, -5)$

38. Hallar todos los puntos sobre la curva $y = 4x^4 - 8x^2 + 16x + 8$ tales que la recta tangente a la curva en dichos puntos sea paralela a la recta $16x - y + 5 = 0$

39. Encuentre las ecuaciones de las dos rectas que pasan por el punto $(2, -4)$ y que son tangentes a la parábola $y = x^2 + x$.

40. ¿Cuántas rectas tangentes a la curva $y = \dfrac{x}{x+1}$ pasan por el punto $(2, 2)$? ¿En qué puntos estas tangentes tocan a la curva?.

41. La ecuación de la trayectoria de un cuerpo en movimiento es $s = (2t+3)^2$. Calcular

    (a) La velocidad media en el recorrido entre $t = 3$ y $t = 7$.

    (b) La velocidad instantánea para $t = 5$.

    (c) La velocidad instantánea para $t = 7$.

42. La ecuación $s = (2t+3)^2$ representa la posición de un móvil en el instante t. Determinar la expresión de la velocidad y la aceleración.

43. Encontrar el punto de la curva $f(x) = (x-2)^2$ en que la recta tangente es perpendicular a $4x - 2y + 2 = 0$

44. Un cohete se lanza verticalmente hacia arriba y su posición viene dada por $e = 500t - 20t^2$, siendo la dirección positiva hacia arriba. Encontrar

    (a) La velocidad del cohete 5 segundos después de haber sido encendido?

    (b) ¿Cuánto tarda el cohete en alcanzar su altura máxima?

45. Encuentre las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $y = \dfrac{x-1}{x+1}$ que sean paralelas a la recta $x - 2y = 1$.

46. Determine para qué valores de x la gráfica de $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 6x + 87$ tiene tangente horizontal.

47. Encontrar una ecuación para cada una de las rectas tangentes a la curva $3y = x^3 - 3x^2 + 6x + 4$, que sean paralelas a la recta $2x - y + 3 = 0$.

48. Determine la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x\{(x-2)x+3\}-1$ en el punto $P(2,5)$.

49. Determine las ecuaciones de las rectas tangentes a $f(x) = x^2+4x$ que pasan por el punto $P(-1,-4)$.

50. Calcular la velocidad de un punto que se mueve de acuerdo con la ley: $s = 180t - 16t^2$. ¿En qué instante se anula la velocidad?

51. Calcular las ecuaciones de las tangentes a la curva $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-9}}$ en los puntos para los cuales $|2x-1| = 9$.

52. Determinar los puntos de la función $2x^2+y-x-5=0$ para los cuales la tangente pasa por el punto $Q(-1,10)$.

53. Derive implícitamente, dy/dx, las siguientes curvas

1. $y\operatorname{sen}2x - x\operatorname{sen}y = \dfrac{\pi}{4}$	2. $x^2+4xy-y^2=19$	3. $\dfrac{y}{x-y} = x^2+1$	4. $x^2 = \dfrac{y^2}{y^2-x}$
5. $2y^2+\sqrt[3]{xy} = 3x^2+7$	6. $x^2y+y^2 = \sqrt{x+y}$	7. $\dfrac{3xy^4-x^2}{x+y} = 1$	8. $xy = \cot(xy)$
9. $y^5+3x^2y^2+5x^4 = 8$	10. $\sqrt[4]{x}+\sqrt{y} = \sqrt{2}$	11. $\sqrt{xy}-\dfrac{x}{2} = \sqrt{y}$	12. $x^4+y^4 = 16$
13. $\cos(x-y) = y\operatorname{sen}x$	14. $xy + y\operatorname{arcsen}x = 1$	15. $\dfrac{x}{y^2}+\dfrac{y^2}{x} = 1$	16. $x^2 = \dfrac{y^2}{y^2-1}$
17. $3x\operatorname{sen}y = y\cos x + 1$	18. $x+y = \operatorname{sen}(xy)$	19. $\cos y = y\cos 2x$	20. $x = \tan 3y$
21. $\left(y^3-x\right)^2 = (x+2)^4$	22. $x^2+2xy = y^2+2x$	23. $3y+\cos y = x^2$	24. $y^2 = 4x^2-8$
25. $\sqrt[3]{xy}+2xy = 9+y^2$	26. $\sqrt{x^2+y^2}+2y = x^2$	27. $3x-y^2 = 5y$	28. $x^\pi = y^2-2y$
29. $\sqrt{x+y}+\sqrt{xy} = 6$	30. $\cos^2 x+\operatorname{sen}^2 y = 1$	31. $\sec y = 3ty+7$	32. $2y-y^2 = x^2$
33. $x\sqrt{1+y}+y\sqrt{1+2x} = 2x$	34. $x\operatorname{sen}y+\cos 2y = \cos y$	35. $\sqrt{x}\operatorname{sen}y-\sqrt{y}\operatorname{sen}x = xy$	
36. $2xy = \left(x^2+y^2\right)^{3/2}$	37. $xy = \operatorname{arcsen}(x+y)$	38. $y^3+y^\pi-x\cos\left(x^2y+x^2y^2\right) = y$	
39. $x^3+xy-y^7x^2 = 0$	40. $\dfrac{\operatorname{sen}\left(xy^3\right)}{2y} = 1$	41. $x^4-\dfrac{6x}{\tan y} = y^4-1$	

54. Encuentre y'' si: **a)** $2x^2y-4y^3 = 4$ en $P(2,1)$; **b)** $\cos\left(x^2y\right)+y^2 = 6$.

55. Encuentre y'' si: **a)** $x^2+y^2 = 25$ en $P(3,4)$; **b)** $x^3-4y^2+3 = 0$.

56. Deduzca la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto P dado

1. $\sqrt{y}+xy^2 = 5$; $P(4,1)$	2. $\operatorname{sen}y = \cos 2x$; $P\left(\frac{\pi}{4},0\right)$	3. $x^2-x\sqrt{xy}-2y^2 = 6$; $P(4,1)$
4. $\sqrt{y} = x^3(2-y)$; $P(1,1)$	5. $\operatorname{sen}(xy) = y$; $P\left(\frac{\pi}{2},1\right)$	6. $y+\cos\left(xy^2\right)+3x^2 = 4$; $P(1,0)$
7. $x^3y+y^3x = 10x$; $P(1,2)$	8. $(x-y)^2 = x$; $P(1,0)$	9. $x\operatorname{sen}y+y\cos x = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$; $P\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$

57. Encuentre los puntos de $2\left(x^2+y^2\right)^2 = 25\left(x^2-y^2\right)$, donde la tangente sea horizontal.

58. Encuentre las ecuaciones de las rectas tangentes a la elipse $x^2+4y^2=36$, que pasan por el punto $(12,3)$.

59. Hay dos rectas tangentes a la curva $x^2+4y^2-4x-8y+3=0$ que pasan a través del punto $(-1,3)$. Encontrar una ecuación de cada una de estas rectas.

60. Hallar el área del triángulo que forman los ejes coordenados y la recta tangente a la curva $\operatorname{sen} y=\cos 2x$ en un punto de abscisa igual a $\dfrac{\pi}{4}$

61. Encuentre todos los puntos de la curva $x^2y^2+xy=2$, donde la pendiente de la recta tangente sea -1.

62. La tangente a la curva $x^2+y^2=25$ en el punto $P(-3,4)$ forma un triángulo rectángulo con los ejes coordenados. Calcular su área.

63. Determinar la(s) ecuación(es) de la(s) recta(s) tangente(s) a la curva $x^3+y^3=3xy$ en el punto cuando dicha curva se corta con la recta $y=x$.

64. Calcular las ecuaciones de la recta tangente a la curva que representa $\operatorname{sen}(xy)=\cos(x+y)$ en el punto de corte de la misma con el eje y en el intervalo $(0,\pi)$.

65. Dada la función $3x^2-y^2=2$, calcular la ecuación de la recta tangente a la misma con pendiente negativa y ordenada en el origen igual a 2.

66. Encuentre dx/dy

1. $y^4+x^2y^2+yx^4=y+1$	2. Si $x[f(x)]^3+xf(x)=6$, encuentre $f'(3)$
3. $\left(x^2+y^2\right)^2=ax^2y$	4. Si $[g(x)]^2+12x=x^2g(x)$ y $g(4)=12$, encuentre $g'(4)$

67. Demuestre que la suma de las intersecciones x y y de cualquier recta tangente a la curva $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{c}$, es igual a c.

68. Encontrar una ecuación de la recta tangente a la curva $16x^4+y^4=32$ en el punto $(1,2)$.

69. Verifique que las rectas tangentes a las curvas $y^2=4x^3$ y $2x^2+3y^2=14$ en el punto $(1,2)$ son perpendiculares entre si.

70. Verificar que las rectas tangentes a las curvas $4y^3-x^2y-x+5y=0$ y $x^4-4y^3+5x+y=0$ en el origen, son perpendiculares

71. Encuentre la ecuación de la recta tangente de la curva en el punto o valor indicado

Curva	Punto	Curva	Punto	Curva	Punto
$x^2+y^3-1=0$	$x=-2$;	$\tan 2y=x$	$y=\pi/2$;	$y^3+2x=7y$	$y=1$;
$x^2-xy+y^2=3$	$x=0$;	$2y^2-2xy=1$	$x=1/2$;	$y^2=x^2-4x+7$	$x=0$;
$\operatorname{sen} y=x$	$y=\pi/6$;	$\operatorname{sen} y+2y=x^2$	$y=0$		

72. En cada uno de los siguientes ejercicios, encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva dada en el punto indicado

Hipérbola: $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$, $\left(-5,\dfrac{9}{4}\right)$	Astroide: $x^{2/3}+y^{2/3}=4$, $\left(-3\sqrt{3},1\right)$
Elipse: $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{36}=1$, $\left(-1,4\sqrt{2}\right)$	Lemniscata: $2\left(x^2+y^2\right)^2=25\left(x^2-y^2\right)$, $(3,1)$
Piriforme: $y^2=x^3(2-x)$, $(1,1)$	Concoide de Nicomedes: $9y^2=(y-1)^2\left(x^2+y^2\right)$, $(0,-2)$

73. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la hipérbola $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ en el punto (x_0, y_0).

74. Demuestre, utilizando derivación implícita, que cualquier recta tangente en un punto P a una circunferencia con centro en 0 es perpendicular al radio OP.

75. Dos curvas se llaman **ortogonales** si en todo punto de intersección sus rectas tangentes son perpendiculares. Demuestre que las curvas dadas son ortogonales

1. $2x^2 + y^2 = 3, \quad x = y^2$ 2. $x^2 - y^2 = 5, \quad 4x^2 + 9y^2 = 72$

Respuestas: Ejercicios

1.1. $-10t + 15t^4$; 1.2. $\frac{7\left(\left(x^2-x\right)\cos x-(2x-1)\operatorname{sen} x\right)}{\left(x^2-x\right)^2}$; 1.3. $-\operatorname{sen} t + \frac{1}{2\sqrt{t}}$; 1.4. $-\frac{2}{x^3} + 2$; 1.5. $\frac{5x\cos 5w-3\operatorname{sen} 5w}{5w^4}$;

1.6. $\sec x \tan x$; 1.7. $\frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{t^2+2t}{(t+1)^2}$; 1.8. $-\frac{1}{t^2} - \frac{3}{(t-1)^4}$; 1.9. $\frac{3z-1}{2\sqrt{3z}}$; 1.10. $-\csc x \cot x$;

1.11. $\frac{\left(t^2-t+4\right)(1+\csc t\cot t)-(t-\csc t)(2t-1)}{\left(t^2-t+4\right)^2}$; 1.12. $f'(x)\, g(x)\, h(x) + f(x)\, g'(x)\, h(x) + f(x)\, g(x)\, h'(x)$; 1.13. $4(2t+3)$;

1.14. $\frac{1}{2x-\sqrt{x}-x^{\frac{3}{2}}}$; 1.15. $\frac{x-3}{2x\sqrt{x}}$; 1.16. $2\cos 2x$; 1.17. $\frac{1}{18}x^{-2}\left(2x^{\frac{4}{3}}\sqrt{3} - 3x^{\frac{2}{3}}\right)$; 1.18. $\frac{6t^2+12t}{(t+1)^2}$;

1.19. $2(\tan t + 1)\sec^2 t$; 1.20. $\frac{(1+\cos x)\left(x^2+x+1\right)-\left(x-\pi^3+\operatorname{sen} x\right)(2x+1)}{\left(x^2+x+1\right)^2}$; 1.21. $\frac{2-\sqrt[4]{x^3}}{4\sqrt{x}\left(\sqrt[4]{x^3}+1\right)^2}$; 1.22. $\frac{-6t}{(2t-3)^3}$;

1.23. $2\cos 2x$; 1.24. $2\operatorname{sen} 2y$; 1.25. $-2\operatorname{sen} 2x$; 1.26. $\frac{3t^2\left(4t^3+4t^6-1\right)}{\left(4t^6+1\right)^2}$; 1.27. $\frac{\sqrt{2p}}{2\sqrt{x}}$;

1.28. $\frac{(2x+4\operatorname{sen} x+4x\cos x)\left(x^6+3x-1\right)-\left(x^2+4x\operatorname{sen} x\right)\left(6x^5+3\right)}{\left(x^6+3x-1\right)^2}$; 1.29. $\frac{5\left(x^2+x\right)\sec x\tan x-(2x+1)\sec x}{\left(x^2+x\right)^2}$;

1.30. $\frac{f'(t)g(t)h(t)+f(t)g'(t)h(t)-f(t)g(t)h'(t)}{(h(t))^2}$; 1.31. $2\tan x\sec^2 x$; 1.32. $\frac{2\cos x}{(1-\operatorname{sen} x)^2}$; 1.33. $\frac{(2+t)\sec^2 t-\tan t}{(2+t)^2}$;

1.34. $\frac{4\sqrt{x}-1}{6x^{2/3}\left(\sqrt{x}-2x+\sqrt{x^3}\right)}$; 1.35. $-2\csc^2 2x$; 1.36. $\left(\frac{\operatorname{sen} x}{4x} + 2\cos x\right)\sqrt[4]{x}\operatorname{sen} x$; 2.1. Pos.: $\mathbb{R}$, Neg.: $\emptyset$;

2.2. Pos.: $(-\infty,-4)\cup(0,\infty)$, Neg.: $(-4,-2)\cup(-2,0)$; 2.3. Pos.: $(-\infty,0)\cup(1,\infty)$, Neg.: $(0,1)$;

2.4. Pos.: $(1,\infty)$, Neg.: $(-\infty,0)\cup(0,1)$; 2.5. Pos.: $\left(-\infty,\frac{3}{4}\right)$, Neg.: $\left(\frac{3}{4},\infty\right)$; 2.6. Pos.: $\left(0,\frac{1}{3}\right)$, Neg.: $\left(\frac{1}{3},\infty\right)$;

2.7. Neg.: $\mathbb{R}-\{1\}$; 2.8. Pos.: $\mathbb{R}$; 2.9. Pos.: $(1,\infty)$, Neg.: $(-\infty,0)\cup(0,1)$; 2.10. Pos.: $(2,\infty)$, Neg.: $(0,2)$;

2.11. Pos.: $(-\infty,-2)\cup(0,\infty)$, Neg.: $(-2,0)-\{-1\}$; 2.12. Pos.: $\mathbb{R}-\{-1\}$; 2.13. Pos.: $(-\infty,2)\cup(6,\infty)-\{0\}$, Neg.: $(2,6)$; 2.14. Pos.: $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$, Neg.: $(-1,1)-\{0\}$; 2.15. Pos.: $(0,\infty)$, Neg.: $(-1,0)$;

2.16. Pos.: $(1,\infty)$, Neg.: $(-\infty,1)$; 3.1. $\frac{x^2f'(x)+2xf(x)}{x^4}$; 3.2. $\frac{2xf(x)+x^2f'(x)}{f^2(x)}$; 3.3. $\frac{xf(x)+2x^2f'(x)-1}{2x^{3/2}}$;

3.4. $\frac{x^2f'(x)-2-xf(x)}{x^3}$; 3.5. $2xf(x) + x^2f'(x)$; 3.6. $\frac{e^x\left(f(x)-f'(x)\right)}{f^2(x)}$; 3.7. $\frac{x^2f'(x)-1}{x\ln^2 x}$;

3.8. $\frac{\left(3x^2f(x)x^3f'(x)\right)\cos x+x^3f(x)\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}$; 4.1. 9; 4.2. 23; 4.3. -2; 4.4. $\frac{15}{2}$; 5.1. -5;

5.2. -11; 5.3. $\frac{5}{9}$; 5.4. $-\frac{13}{36}$; 6. 15; 7.1. $\frac{1}{2\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}$; 7.2. $\frac{1}{2}\frac{\cos x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}}$; 7.3. $-\operatorname{sen} x\cos(\cos x)$;

7.4. $-\cos x\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)$; 7.5. $3\sec^2(3x)$; 7.6. $\pi\cos(\pi t)$; 7.7. $\frac{1}{\pi}\cos\left(\frac{x}{\pi}\right)$; 7.8. $-\frac{1}{2(1-2x)^{3/4}}$;

7.9. $-3\operatorname{sen} 3x$; 7.10. $-3\cos^2 x\operatorname{sen} x$; 7.11. $-\frac{\sec^2(1/x)}{x^2}$; 7.12. $\frac{\sec\sqrt[3]{x}\tan\sqrt[3]{x}}{3\sqrt[3]{x^2}}$; 7.13. $\frac{5}{3(5x+1)^{2/3}}$;

7.14. $3t^2\operatorname{sen}\left(2-t^3\right)$; 7.15. $2(\tan t-4)\sec^2 t$; 7.16. $30x^4\cos\left(3x^5+3\right)\operatorname{sen}\left(3x^5+3\right)$;

7.17. $-8\cos x\operatorname{sen} x\cos^3\left(\operatorname{sen}^2 x\right)\operatorname{sen}\left(\operatorname{sen}^2 x\right)$; 7.18. $\frac{-3}{2\sqrt{\tan(\cos 3x)}}\sec^2(\cos 3x)\operatorname{sen} 3x$; 7.19. $\frac{\sec\sqrt[3]{x}\tan\sqrt[3]{x}}{6\sqrt[3]{x^2}\sqrt{\sec\sqrt[3]{x}}}$;

7.20. $-\frac{2x}{3\left(1+x^2\right)^{2/3}}\csc\left(\sqrt[3]{1+x^2}\right)\cot\left(\sqrt[3]{1+x^2}\right)$; 7.21. $12\operatorname{sen} 8x\cos^2\left(\cos^2 4x\right)\operatorname{sen}\left(\cos^2 4x\right)$;

7.22. $2G'\left(G^2\left(G\left(z\right)\right)\right)G\left(G\left(z\right)\right)G'\left(G\left(z\right)\right)G'\left(z\right)$; 7.23. $\frac{8\pi}{3(\pi x)^{2/3}}\tan^2\left(2\sqrt[3]{\pi x}\right)\sec^2\left(2\sqrt[3]{\pi x}\right)$;

7.24. $\frac{\left(x-2x^3\right)\cos x-\frac{4}{3}\left(x-2x^3\right)^{1/3}(1-6x)\operatorname{sen}x}{\left(x-2x^3\right)^{7/3}}$; 7.25. $\cos\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$; 7.26. $\frac{6\left(t+\sqrt{t}\right)\sec^2 t-\tan t}{6\sqrt{t}\left(1+\sqrt{t}\right)^{4/3}}$;

7.27. $\frac{\left(\frac{1}{2}\sqrt{\sec x}\tan x+2\right)\cos(\operatorname{sen}3x)+3\left(\sqrt{\sec x}+2x\right)\operatorname{sen}(\operatorname{sen}3x)\cos 3x}{\cos^2(\operatorname{sen}3x)}$; 7.28. $\frac{4x^3\cos\left(x^4\right)\operatorname{sen}x-4\cos x\operatorname{sen}\left(x^4\right)}{\operatorname{sen}^5 x}$;

7.29. $\frac{\sqrt{\frac{2}{x}}\cos\sqrt{2x}\operatorname{sen}2x-\operatorname{sen}\sqrt{2x}}{\operatorname{sen}^{3/2}2x}$; 7.30. $\frac{1}{3\left(x+\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)^{2/3}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right)$; 7.31. $\frac{\sec x}{2}\left(1-x\tan x\right)\sqrt{\frac{\operatorname{sen}x}{x}}$;

7.32. $\frac{11\sqrt[3]{3}}{3x^{\frac{14}{3}}}\csc\left(\frac{\sqrt[3]{3x}}{x^4}\right)\cot\left(\frac{\sqrt[3]{3x}}{x^4}\right)$; 7.33. $5\left(3t+\sqrt{t^2+1}\right)^4\left(\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}+3\right)$;

7.34. $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\operatorname{sen}(4t)}{t\tan t}}\frac{\left(\tan t+t\sec^2 t\right)\operatorname{sen}(4t)-4t\tan t\cos(4t)}{\operatorname{sen}^2(4t)}$; 7.35. $\frac{3\cos x\cos\left(\sqrt{x}-2\right)+2\sqrt{x}\operatorname{sen}x\operatorname{sen}\left(\sqrt{x}-2\right)}{6\sqrt{x}\sqrt[3]{\cos^4 x}}+\sqrt{\frac{7}{4x}}$;

7.36. $\frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{t}}\sec^2\sqrt{t}+5\cos(5t)\right)t^2\cos(\operatorname{sen}t)-\left(\tan\sqrt{t}+\operatorname{sen}(5t)\right)\left(2t\cos(\operatorname{sen}t)-t^2\cos t\operatorname{sen}(\operatorname{sen}t)\right)}{t^4\cos^2(\operatorname{sen}t)}$;

7.37. $\frac{3\left(t^2-t\right)^2(2t-1)\cos^5\sqrt{6t}+5\left(t^2-t\right)^3\cos^4\sqrt{6t}\operatorname{sen}\sqrt{6t}\sqrt{\frac{3}{2t}}}{\cos^{10}\sqrt{6t}}$; 7.38. $-\left(\frac{t}{\operatorname{sen}t}+\frac{\sqrt{t}}{\sqrt[3]{3t+1}}\right)^{-2}\left(\frac{\operatorname{sen}t-t\cos t}{\operatorname{sen}^2 t}+\frac{t+1}{2\sqrt{t}\sqrt[3]{(3t+1)^4}}\right)$;

7.39. $5\frac{\left(t^3+\sqrt{\operatorname{sen}t}\right)^4}{\operatorname{sen}^6(\cos t)}\left(\left(3t^2+\frac{\cos t}{2\sqrt{\operatorname{sen}t}}\right)\operatorname{sen}\left(\cos t\right)+\left(t^3+\sqrt{\operatorname{sen}t}\right)\operatorname{sen}t\cos\left(\cos t\right)\right)$;

7.40. $3\left(\frac{1}{2\sqrt{t}}-1\right)\operatorname{sen}^2\left(\sqrt{t}-t\right)\cos\left(\sqrt{t}-t\right)$; 7.41. $\frac{1}{3}\left(\frac{\cos x}{\sqrt{x}}+\sqrt[4]{x}\right)^{-2/3}\left(\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}-\frac{2x\operatorname{sen}x+\cos x}{2x^{3/2}}\right)$;

7.42. $\frac{\frac{x\cos x}{2\sqrt{\operatorname{sen}x}}\cos\left(\operatorname{sen}x^2\right)\cos\left(\tan\sqrt{\operatorname{sen}x}\right)\sec^2\sqrt{\operatorname{sen}x}-\operatorname{sen}\left(\tan\sqrt{\operatorname{sen}x}\right)\left(\cos\left(\operatorname{sen}x^2\right)-8x^2\cos x^2\operatorname{sen}\left(\operatorname{sen}x^2\right)\right)}{x^2\cos^5\left(\operatorname{sen}x^2\right)}$; 8.1. $2xf'\left(x^2\right)$;

8.2. $3\left(f\left(x\right)\right)^2f'\left(x\right)$; 8.3. $\cos xf'\left(\operatorname{sen}x\right)$; 8.4. $2x\sec^2\left(x^2\right)f'\left(\tan\left(x^2\right)\right)$; 8.5. $f'\left(f\left(x\right)\right)f'\left(x\right)$;

8.6. $\operatorname{sen}2x\left(f'\left(\operatorname{sen}^2x\right)-f'\left(\cos^2x\right)\right)$; 9.1. -96; 9.2. $\frac{3}{8}$; 9.3. -12; 9.4. 6; 10. 24; 11. 160;

12.*a*. $\frac{dy}{dx}=20f\left(2x\right)f'\left(2x\right)+2g^2\left(4x\right)g'\left(4x\right)$; 12.*b*. $\frac{d^2y}{dx^2}=40\left(f'\left(2x\right)\right)^2+40f\left(2x\right)f''\left(2x\right)+16g\left(4x\right)\left(g'\left(4x\right)\right)^2+8g^2\left(4x\right)g''\left(4x\right)$;

13.1. $af'\left(ax\right)$; 13.2. $-f'\left(-x\right)$; 13.3. $-\frac{f'(1/x)}{x^2}$; 13.4. $2xf'\left(x^2\right)$; 13.5. $2f'\left(x^2\right)+4x^2f''\left(x^2\right)$;

13.6. $3x^2f'\left(f\left(x^3\right)\right)f'\left(x^3\right)$; 14.*a*. $\frac{dy}{dx}=30$; 14.*b*. $\frac{d^2y}{dx^2}=384$; 20.1. $r=-1$, $r=-2$; 20.2. $r=1$, $r=4$;

21. $y=2-\frac{x}{2}$; 22. $y=6x-4$; 23. $(0,0)$ y $\left(\frac{2}{3},-\frac{4}{27}\right)$; 24. $4y-x+1=0$; 25. $y=1$;

26. $\left(-\frac{1}{3},\frac{32}{27}\right)$ y $(1,0)$; 27. $(0,0)$ y $\left(-2,-\frac{2}{3}\right)$; 28.1. $y=4-\frac{1}{3}x$; 28.2. $y=4$; 28.3. $y=20x-48$;

28.4. $x-2y+2=0$; 29. $2y-x+1=0$, $2y-x-7=0$; 30. $(4,8)$; 31. $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$;

32. 2 rectas, $\left(-\sqrt{3}-2,\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}+1}\right)$, $\left(\sqrt{3}-2,\frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}-1}\right)$; 33. $y+x+1=0$, $11x-y+25=0$; 35.1. $4y-x+14=0$;

35.2. $y-x+1=0$; 35.3. $12x+y+98=0$; 35.4. $y-f\left(a\right)=-\frac{x-a}{f'(a)}$; 36. $\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{256}\right)$; 37. $3y-x+17=0$;

38. $(0,8)$, $(1,20)$, $(-1,-12)$; 39. $y=13x-30$, $y=-x-2$; 40. 2 rectas, $(0,0)$, $\left(-4,\frac{4}{3}\right)$ 41.*a*. 52;

41.*b*. 52; 41.*c*. 68; 42.*a*. $v=4\left(2t+3\right)$; 42.*b*. $a=4\left|2t+3\right|$; 43. $\left(\frac{7}{4},\frac{1}{16}\right)$; 44.*a*. 300;

44.*b*. $t=12.5$; 45. $2y-x+1=0$, $2y-x-7=0$; 46. $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$; 47. $y=2x+\frac{4}{3}$, $y=2x$;

48. $y=7x-9$; 49. $y=4x$, $y+4=0$; 50. $v=180-32t$, $t=5.625$;

51. $4y+10x-51=0$, $7y+4\sqrt{7}x+15\sqrt{7}=0$; 52. $(1,4)$, $(-3,-14)$; 53.1. $\frac{\operatorname{sen}y-2y\cos 2x}{\operatorname{sen}2x-x\cos y}$; 53.2. $\frac{x+2y}{y-2x}$;

53.3. $\frac{y+2x^3+2xy^2-4yx^2}{x}$; 53.4. $-\frac{2x^3-y^2+2xy^4-4x^2y^2}{2xy}$; 53.5. $\frac{y\left(18x^2-\sqrt[3]{xy}\right)}{x\left(12y^2+\sqrt[3]{xy}\right)}$; 53.6. $\frac{1-4xy\sqrt{x+y}}{2\sqrt{x+y}\left(2y+x^2\right)-1}$;

53.7. $\frac{2xy+x^2-3y^5}{x\left(x+9y^4+12xy^3\right)}$; 53.8. $-\frac{y}{x}$; 53.9. $-\frac{20x^3+6xy^2}{5y^4+6x^2y}$; 53.10. $-\frac{\sqrt{y}}{2\sqrt[4]{x^3}}$; 53.11. $\frac{y-\sqrt{xy}}{\sqrt{x}-x}$; 53.12. $\frac{x^3}{y^3}$;

53.13. $\frac{y\cos x+\operatorname{sen}(x-y)}{\operatorname{sen}(x-y)-\operatorname{sen}x}$; 53.14. $-\frac{y}{\sqrt{1-x^2}}\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x+\operatorname{arcsen}x}$; 53.15. $\frac{y}{2x}$; 53.16. $-\frac{x\left(y^2-1\right)^2}{y}$; 53.17. $\frac{y\operatorname{sen}x+3\operatorname{sen}y}{\cos x-3x\cos y}$;

53.18. $\frac{y\cos(xy)-1}{1-x\cos(xy)}$; 53.19. $\frac{2y\operatorname{sen}2x}{\cos 2x-\operatorname{sen}y}$; 53.20. $\frac{\cos^2 3y}{3}$; 53.21. $\frac{2(x+2)^3+y^3-x}{3\left(y^3-x\right)y^2}$; 53.22. $\frac{1-x-y}{x-y}$; 53.23. $\frac{2x}{3-\operatorname{sen}y}$;

53.24. $\frac{4x}{y}$; 53.25. $\frac{-y}{2x+x\sqrt[3]{xy}-2y}\left(2+\frac{1}{3\sqrt[3]{(xy)^2}}\right)$; 53.26. $\frac{2x\sqrt{x^2+y^2}-x}{2\sqrt{x^2+y^2}+y}$; 53.27. $\frac{3}{5+2y}$; 53.28. $\frac{\pi x^{\pi-1}}{2y-2}$;

53.29. $-\frac{\sqrt{xy}+y\sqrt{x+y}}{\sqrt{xy}+x\sqrt{x+y}}$; 53.30. $\frac{\operatorname{sen}2x}{\operatorname{sen}2y}$; 53.31. $\frac{3x}{\sec y\tan y-3x}$; 53.32. $\frac{x}{1-y}$; 53.33. $\frac{2-\frac{y}{\sqrt{2x+1}}-\sqrt{y+1}}{\frac{x}{2\sqrt{y+1}}+\sqrt{2x+1}}$;

53.34. $-\frac{\operatorname{sen}y}{\operatorname{sen}y+x\cos y-2\operatorname{sen}2y}$; 53.35. $\frac{y-\frac{1}{2\sqrt{x}}\operatorname{sen}y+\sqrt{y}\cos x}{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-y^2}}-\frac{1}{2\sqrt{y}}\operatorname{sen}x-x}$; 53.36. $\frac{3x\sqrt{x^2+y^2}-2y}{2x-3y\sqrt{x^2+y^2}}$; 53.37. $\frac{y\sqrt{1-(x+y)^2}-1}{1-x\sqrt{1-(x+y)^2}}$;

53.38. $\frac{\cos\left(x^2y+x^2y^2\right)-x\left(2xy+2xy^2\right)\operatorname{sen}\left(x^2y+x^2y^2\right)}{3y^2+\pi y^{(\pi-1)}-1+x\left(x^2+2x^2y\right)\operatorname{sen}\left(x^2y+x^2y^2\right)}$; 53.39. $\frac{2xy^7-y-3x^2}{x-7x^2y^6}$; 53.40. $\frac{y^4\cos\left(xy^3\right)}{\operatorname{sen}\left(xy^3\right)-3xy^3\cos\left(xy^3\right)}$;

53.41. $\frac{3\cot y-2x^3}{3x\csc^2 y-2y^3}$; 54.$a$. -15; 54.b. $\frac{y\left(2x\cos^3 xy+9y^5\operatorname{sen}xy\right)}{\left(x\cos xy+3y^2\right)^3}$; 55.$a$. $-\frac{25}{64}$; 55.b. $\frac{3x^2}{8y}$;

56.1. $17y-25+2x=0$; 56.2. $y=-2x+\frac{\pi}{2}$; 56.3. $8y-5x+12=0$; 56.4. $y=2x-1$; 56.5. $y=1$;

56.6. $y=6-6x$; 56.7. $13y+4x-30=0$; 56.8. $2y-x+1=0$; 56.9. $y=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi-4}{\pi+4}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$;

57. $x^2-y^2=\frac{25}{8}$; 58. $y=3$, $y=\frac{24}{29}x-\frac{837}{145}$; 59. $4y+11x-1=0$ y $4y+x-11=0$; 60. $A=\frac{\pi^2}{16}$;

61. (x_0,x_0) y $\left(x_0,-\frac{1}{2x_0}\right)$, $x_0\neq 0$; 62. $A=\frac{625}{24}$; 63. $y=0$ y $y=1-x$; 64. $y=\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}+1\right)x$;

65. $y=-3x+2$; 66.1. $x'=\frac{1-4y^3-x^4-2yx^2}{2y^2x+4yx^3}$; 66.2. $x'=-\frac{x+3y^2x}{y+y^3}$, $f'(3)=-\frac{1}{6}$; 66.3. $x'=\frac{4y\left(x^2+y^2\right)-ax^2}{2axy-4x\left(x^2+y^2\right)}$;

66.4. $x'=\frac{2y-x^2}{2xy-12}$, $g'(4)=\frac{21}{2}$; 68. $y=-2x+4$; 71.1. Para $x^2+y^3-1=0$: $y+\sqrt[3]{3}=\frac{4}{9}\sqrt[3]{3}\,(x+2)$;

71.2. Para $\tan 2y=x$: $2y-x+\pi=0$; 71.3. Para $y^3+2x=7y$: $2y-x+1=0$;

71.4. Para $x^2-xy+y^2=3$: $2y-x-2\sqrt{3}=0$ y $2y-x+2\sqrt{3}=0$;

71.5. Para $2y^2-2xy=1$: $3y-x+2=0$ y $3y-2x+4=0$;

71.6. Para $y^2=x^2-4x+7$: $y=\frac{2}{7}\sqrt{7}x-\sqrt{7}$ y $y=-\frac{2}{7}\sqrt{7}x+\sqrt{7}$; 71.7. Para $\operatorname{sen}y=x$: $y-\frac{\pi}{6}=\frac{2}{3}\sqrt{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)$;

71.8. Para $\operatorname{sen}y+2y=x^2$: $y=0$; 72.1. Para $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$: $4y+5x+16=0$;

72.2. Para $x^{2/3}+y^{2/3}=4$: $4y+5x+16=0$; 72.3. Para $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{36}=1$: $y-4\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}(x+1)$;

72.4. Para $2\left(x^2+y^2\right)^2=25\left(x^2-y^2\right)$: $13y+9x-40=0$; 72.5. Para $y^2=x^3(2-x)$: $y=x$;

72.6. Para $9y^2=(y-1)^2\left(x^2+y^2\right)$: $y=-2$; 73. $a^2y_0y+b^2x_0x=1$;

Bibliografía

1. **Purcell, E. - Varberg, D. - Rigdon, S.**: "Cálculo". Novena Edición. PEARSON Prentice Hall.
2. **Stewart, J.**: "Cálculo". Grupo Editorial Iberoamericano.